

なぜ翼に揚力が発生するか？

—ベルヌーイの定理か流線曲率の定理か—

How do Wings Generate Lift

—Bernoulli Theorem or Streamline-Curvature Theorem—

執筆プロフィール



高木 正平
Shohei TAKAGI

- ◎1978年東京大学大学院工学系研究科航空学専攻博士課程修了，博士（工学），2009年宇宙航空研究開発機構を退職し，現職。
- ◎研究・専門テーマは，境界層遷移，流れの制御
- ◎室蘭工業大学教授 航空宇宙機システム研究センター
(〒050-8585 室蘭市水元町 27-1/
E-mail : pantaka@mmm.muroran-it.ac.jp)

1. はじめに

ジャンボジェット機よりさらにひと回り大きいエアバス社の最新旅客機 A380 の最大離陸重量は 560t である。この重量を数字だけでイメージすることは難しいが、次のようなたとえで考えればその数字の大きさが描ける。JR 東海の 700 系新幹線は 16 両編成で総重量 708t であることから、12~13 両編成の車両が空を飛んでいる計算になる。左右の主翼がその大部分の揚力発生を担い、主翼 1m² 当たり 660kg の揚力が発生している。このような想像を超える揚力を生み出す翼の仕組みに多くの人々が関心と疑問を抱くのもごく自然である。それゆえ、しばしば翼の揚力に関する話題が取り上げられ、インターネットのホームページでも閲覧できる⁽¹⁾。

ポテンシャル流と等角写像を用いた古典的な Kutta-Joukowski (K-J) 定理では、揚力を発生している翼はそれを取り囲む循環を持ち、Kutta の条件あるいは Joukowski の仮定（以下、Kutta の条件）を翼の後縁に課せば、そこから求まる循環値は揚力に比例して実験とよく整合することが示されている。すなわち、歴史的には 100 年前にこの K-J 定理で揚力の発生機構は言い尽くされているわけである。ただ、問題なのはこの定理は翼を含めて物体の周りになぜ循環が発生するかについて何も示していないことであろう。それゆえ、この循環の発生について、「翼を取り巻く時計方向に回転する大きな渦が存在」する、といった説

明がなされているが、では「なぜそのような渦が作られるか」と切り返されると、たちどころに答えに窮してしまう。そこで本論ではこの「循環、すなわち揚力が発生する条件」とは何かを整理し、その結果として揚力が発生した物体周りの流線に着目する。そして、「流線と揚力の関係」について可能な限り平易な解説を試みることにする。そのため前提となる流体の性質について以下に確認しておきたい。

K-J 定理は、自明のように対象とする流れは非粘性流であるが、Kutta の条件は流体が粘性を持つことを暗黙に仮定している。そして、Kutta の条件は唯一つのポテンシャル解を与え、実測と整合するという意味で確かに重要である。しかし、たとえば後縁に鋭い角を持たない翼でも揚力は発生する事実を鑑みると、揚力の発生原理そのものを理解するうえでそれほど重要視する必要はなさそうである。また、流体粘性は十分大きなレイノルズ数の流れにおいては物体のごく近傍のみに影響を及ぼすのであって、揚力発生に直接かかわる流体の加速・減速になら影響を与えない。以上の流体の性質を理解すれば、渦度 (vorticity) や剪断 (shear) といった流体力学の難しい部分に足を踏み入れることなく、本課題の根本原理についてはポテンシャル流で十分説明できることが期待される。このような前提の下で、K-J 定理を中心に再考するが、すでに多くの流体力学のテキストに記述されているので引用する式は最小限に止め、揚力発生に不可欠な「循環」が発生する条件に着目する。

循環発生条件から直ちに揚力の発生機構を解説することは難しい。この解説こそ本論に課された最重要課題である。たとえば、静止した翼が急激に動き出した際に翼後縁から放出される出発渦 (starting vortex) と、翼に取り残された出発渦と逆の循環を持つ渦から揚力の発生が説明されているが、Kelvin の渦不生不滅の原理の仮定や、渦と循環との関係など一般向けの説明には不向きである。また、従来から揚力の発生にしばしば引用されるベルヌーイの定理は、エネルギー保存式であり、「翼上面に沿う流れは下面のそれより速い」といった条件のもとで初めてその威力が発揮されるが、この条件の正当性をどのように保証するかが大きな問題であった。そこで本論では、循環が発生している翼を回り込む流線の曲がりに着目する。すなわち、湾曲した流線に沿う流体粒子の向心力とこれに見合う圧力こう配

の関係から直接揚力の発生原理を説明するもので、ベルヌーイの定理のような付加条件を要求しない。

2. クッタ・ジューコフスキーの定理

2.1 循環を伴う円柱周りの流れ

一様流速の中に静止した円柱周りの流れは、流れの粘性を考えなければ、複素ポテンシャル理論を用いて解析的に解くことができる。この円柱が時計方向に回転している場合は、円柱とさらにその中心に渦度が集中した渦糸を配置すれば、円柱周りの流れを解析的に記述することもよく知られているところである。この渦糸の循環の強さを Γ (反時計方向を正にとる) とし、一様流速を U 、半径 a の円柱中心を通る水平軸と円柱最下流端から時計方向に回転角 θ をとるならば円柱表面の速度 v_θ は、

$$v_\theta = -2U \sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi a} \quad (1)$$

である。図1には、一様速度 $U=1$ の流れの中に、半径が1の円柱とそれが回転していない場合 $\Gamma=0$ と $\Gamma=2\pi$ で回転している場合の流線を描き、両者を比較したものである。円柱の前後に流れの速度が0となる特異点、すなわち二つの淀み点が存在し、 $\Gamma=0$ の場合円柱の中心軸上に存在するが、円柱の回転によって、淀み点位置は円柱の中心軸より下方へ移動する。その位置は、本条件では(1)より $v_\theta=0$ とすることで、 $\theta_s = -30^\circ$ と求められる。 $\Gamma=0$ の場合、前方の淀み点から直角の位置 $\theta = \pm 90^\circ$ 、すなわち円柱の最も厚くなる位置において流れは一様速度の2倍に加速されることは式(1)で明らかである。この事実は、図1(a)の $\theta = \pm 90^\circ$ で円柱と流線 $\psi = \pm 0.4$ の間隔が円柱の影響が及ばない上下流の流線間隔の半分である事実からでも確認できる。当然のこととして、流れは連続の式を満足しているわけである。円柱近傍の流れが加速されることによって、ベルヌーイの定理によれば円柱表面の圧力は遠方の圧力よりは低くなるが、円柱周りの流れは上下対称であることから揚力は働かないことは明らかである。

一方、円柱が回転している場合には、円柱の上方では円柱回転の方向が流れと同じであることから流れはさらに加速され、下方では円柱回転が逆に作用するために減速される。流れの加速減速の様子は流線の間隔からも明瞭であり、注目すべき点は円柱回転によって流線は大きく湾曲してい

ることである。円柱が回転している場合には、ベルヌーイの定理によれば、円柱の上方側は下方側比べて圧力が下がることから、円柱は上向きの力、すなわち揚力を受けることになる。別の見方をすれば、円柱はその後方下向きに流れを偏向した反力として揚力が発生していると解釈することもできよう。揚力は圧力によってもたらされることから、ベルヌーイの定理を用いて円柱表面の圧力を求め、この圧力分布を流れ方向とその直角成分に分離して円柱表面に沿って一周積分すると、抗力と揚力が得られる。積分した結果によると、円柱には流れ方向には抵抗が働かないが、それと直角方向には $\rho U \Gamma$ の大きさの揚力が発生している。円柱に限らず、完全流体の一様な流れの中に置かれた任意の対称物体には抵抗が働かず、日常の実感に反している。これは、ダランベール (d'Alembert) の背理として知られている。また、一様流速 U の中に置かれた物体周りの循環を Γ とすれば、物体には $\rho U \Gamma$ なる揚力が働く。これを、クッタ・ジューコフスキーの定理という。

K-J定理は円柱のような二次元柱体に適用されるものであるが、三次元物体についても定性的には適用できる。たとえば、野球のボールが回転運動しているとそれと直角方向に揚力が発生しカーブすることは、マグナス (Magnus) 効果としてよく知られている。回転する円柱に引きずられてその周りに回転運動が生じるのは流体に粘性が存在するためであるが、渦糸は非粘性理論において円柱回転をモデル化したものであることは言うまでもない。

2.2 ジューコフスキー変換

循環を持つあるいは持たない円柱周りの流れについては前節で示したとおり、ポテンシャル理論で記述することができたことから、等角写像で任意の形状を持つ物体周りの流れを調べることができる。 ξ 面から z 面への等角写像

$$z = \xi + \frac{a^2}{\xi}, \quad a > 0 \quad (2)$$

はジューコフスキー変換と呼ばれる。例えば図2に示すように、 $\xi = ae^{i\theta}$ とすれば ξ 面では半径 a の円 C_0 は、 z 面では $z = 4a \cos\theta$ となることから、長さ $4a$ の平板 K_0 に写像される。同様に、 ξ 面上の円 C_1 の中心が虚軸上にある場合には、円弧翼 (キャンパ (反り) 付平板) K_1 に写像される。さらに図3に示すように ξ 面上の実軸に中心を持つ円 C_2 は、 z 面で前縁が丸みを帯びた対称翼型形状 (ジューコフスキー翼) K_2 に写像される。また円中心が一般複素平面上にある円 C_3 は、キャンパ付ジューコフスキー翼 K_3 に写像されることは知られているところである。なお、 K_3 のキャンパ線は、図2の K_1 であることは言うまでもない。したがって、反りのない平板、反りのある平板、さらには

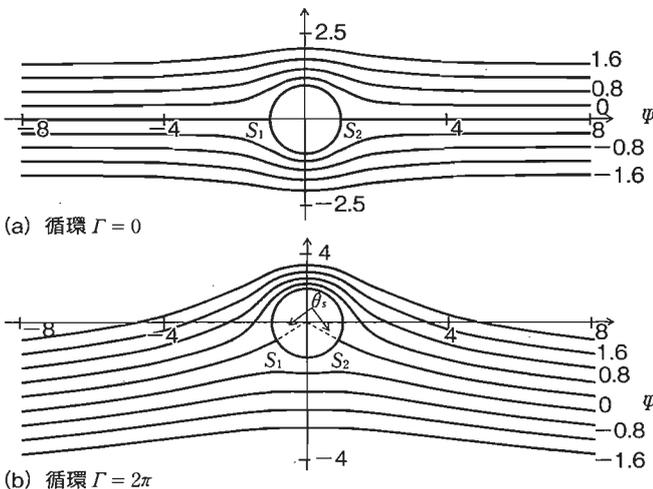


図1 円柱周りの流線

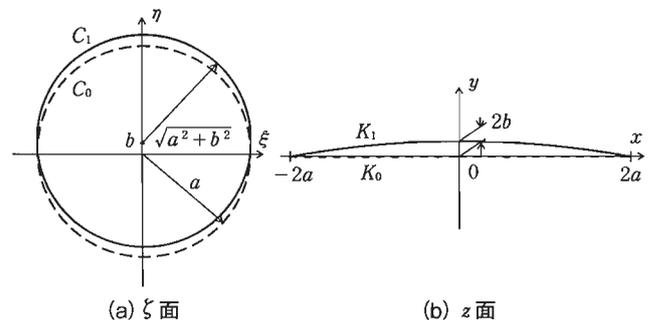


図2 平板と円弧翼

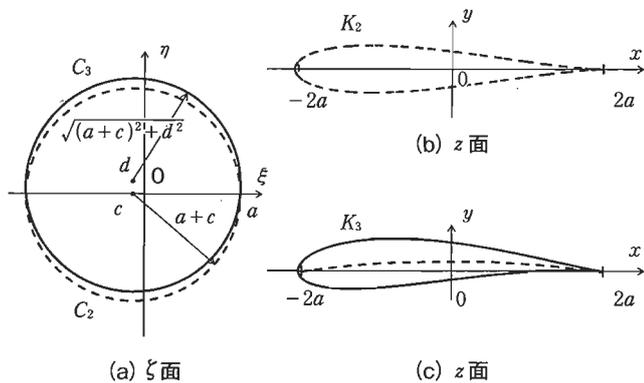


図3 対称と反り付 Joukowski 翼

反り付の翼周りの流れを解くことができるわけである。

具体的な手順としては、 ζ 面で循環を持つ円柱の周りの流れは z 面ではどのように写像されるかを考えればよい。循環を持たない円柱の二つの淀み点は、流れは平板に平行に流れていることからその前縁および後縁に写像されることは明白である。一方、時計方向の循環 $-\Gamma > 0$ を持つ円柱の二つの淀み点は、(2)式に $v_\theta = 0$ を課すと、

$$\sin\theta_s = -\frac{\Gamma}{4\pi aU} \quad (3)$$

となって図1に示すように円柱の中心線より下側 θ_s に移動する。これらの二つの円柱上の淀み点は平板の下面に移動する。

さて z 面において一樣流は平板に平行であるが、もし平板が一樣流に対して α の迎角を持つ流れ場に対応した円柱周り流れに適用する場合には、 ζ 面において一樣流の向きを反時計方向に α だけ回転させればよい。そのために、 ζ の代わりに $\zeta e^{-i\alpha}$ として円柱周りの流れの回転を行えばよい。この回転によって円柱表面の速度は式(1)と同様の手順で求めると

$$v_\theta = -2U \sin(\theta - \alpha) - \frac{\Gamma}{2\pi a} \quad (4)$$

となり、淀み点も角度 α だけ回転する。一方、ジュコーフスキー変換における数学的問題点は、円柱表面($\zeta = a$)の z 面写像点で速度が無限大となることである。前述のように円柱表面に二つの淀み点が存在し、その写像点での発散は明らかに不合理である。そこで、円柱の後方側の淀み点が丁度 x 軸にあるとき、すなわち z 面では後縁に写像されるとき発散は回避でき、(4)式で $\theta = 0$ のとき $v_\theta = 0$ とすることにより

$$\Gamma = 4\pi aU \sin\alpha \quad (5)$$

に帰着できる。この条件は、Kuttaの条件あるいはJoukowskiの仮定と呼ばれ、数学的な特異性を単に回避しただけでなく、翼上下面の流れが合流する後縁で流体が滑らかに流れ去ることを要求するもので、以下に示すように粘性のある現実の流体運動ときわめてよく一致している。

さて、これまで未定であった循環が式(5)のように求まると、回転していない平板に発生する揚力はK-J定理より

$$L = \rho U \Gamma = 4\pi \rho U^2 a \sin\alpha \quad (6)$$

となる。さらに、平板の単位幅当たりの揚力を無次元化すると、

$$C_L = \frac{L}{(1/2)\rho U^2 \cdot 4a} = 2\pi \sin\alpha \quad (7)$$

となり、迎角が小さい場合には近似的に

$$C_L = 2\pi \sin\alpha \cong 2\pi\alpha \quad (8)$$

と表せる。次に反り(キャンバ)を持った平板、すなわち図2のような円弧翼の場合も、反りの大きさ $\gamma = b/2a$ の定義より新しい角度 β を $\gamma = \tan\beta/2$ とするならば小さな反りの場合、同様な解析から揚力係数は

$$C_L = \frac{L}{(1/2)\rho U^2 \cdot 4a} = 2\pi \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\beta} \cong 2\pi(\alpha + \beta) \quad (9)$$

のように近似できる。円弧翼は流れに対する迎角を設定しない場合($\alpha = 0$)でも揚力は発生し、その大きさは、反りを持たない平板翼が迎角 β を持つ場合と同等であることがわかる。同様に反りを持つジュコーフスキー翼についても迎角が小さいならば、揚力係数は式(9)で近似できる。

以上、K-J定理をまとめると、平板を含めて対称翼では、循環すなわち揚力を発生させるためには、一樣流に対して迎角を持たなければならない。一方、反り付の翼では、流れに対する迎角を持たない場合でも循環が発生する。さらにK-J定理が示すところは、迎角と反りが小さい範囲では、式(7)および(9)は翼の形に依存していないことで、揚力傾斜は1度当たり、およそ0.11である。AbbottとDoenhoff⁽²⁾の著書には翼弦長に基づくレイノルズ数が 10^6 を越えたさまざまな対称翼、厚みの異なる翼、さらには反りを持つ翼の揚力・抗力係数の風洞実験結果が記されている。これらの翼に対して、揚力が発生しはじめる近傍の揚力特性はK-J定理とよく一致し、翼断面形状の依存性はきわめて小さいことがわかる。反り付ジュコーフスキー翼の下面は上に凸であるが、下に凸の一般的な翼型についてもジュコーフスキー変換を一般化した等角写像法でその揚力係数は式(9)のようになることは知られている。

平板あるいは対称翼に迎角、あるいはそれらに反りを持たせることで、循環すなわち揚力が発生することが明らかとなった。その結果として物体を回り込む流線はどのように変化したのであろうか。

3. 翼周りの流れ場

K-J定理では時計方向の循環が生じている翼に正の揚力が発生していることが確認できたので、循環と揚力との因果関係について式を用いて掘り下げてみたい。そこでまず先に反り付の翼で迎角を持つ流れ場について観察しよう。図4に掲載した画像は、左から右方向に流れる一樣な流れの中にNACA2412翼を迎角5度に設置した場合の流れの様子を、煙流脈法で可視化したものである⁽³⁾。翼弦長と一樣速度に基づくレイノルズ数は、 $Re = 0.21 \times 10^6$ である。白い筋はケロシンをミスト化した煙で、翼の上流に煙を噴き出す櫛状に並んだ円管が等間隔に取り付けられ、その下流端から煙が自然と流れ出るよう工夫されている。図4を注意深く観察すると、流れは翼の前縁のやや下方位置で分岐し、下面の流れはほぼ前縁近傍から緩やかな吹き下ろしが観察される。一方、上面に沿う流れは翼の最大厚みより下流では下面に沿う流れより大きく吹き下ろされている。また、翼の上面の前縁近傍領域に注目すると、煙の間隔は一樣速度領域におけるそれに比べて明らかに狭く、その狭い領域は翼の中程まで続いている。このような煙線の間隔の狭まりは、流れが局所的に加速されていることを示している。これに対して下面では煙の間隔はやや広がって、流

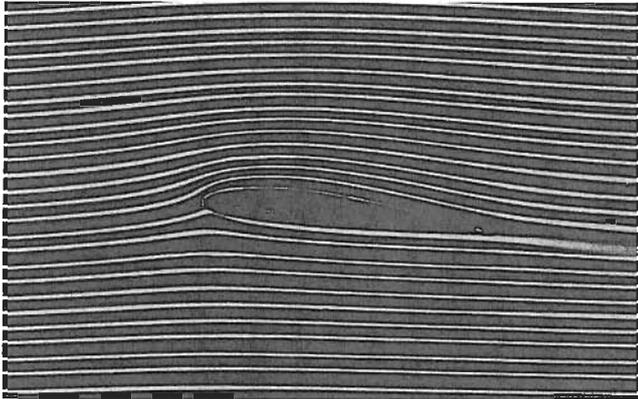


図4 NACA2415翼周りの流れを煙線流脈法で可視化. 迎角は5度, 主流速度8m/s, 翼弦長400mm, $Re = 0.21 \times 10^6$. 流れは左から右

れはやや減速されている。「翼上面の流れは下面のそれより速いことから、ベルヌーイの定理より翼上面の圧力は、下面のそれより低く、揚力の発生が説明できる」という一般向けの説明は、このような実験的事実に基づいている。

さて、本論に戻ろう。揚力が発生している場合は翼の前縁近傍には一部流線の凹が存在するが、おおむね流線の揚力発生方向に凸の曲がりを伴うことである。その曲がりの及ぶ範囲は、下面より上面で広いことを図4でも確認できる。そこでこの流線の曲率に着目し、数式を用いて、湾曲した流線と揚力の関係を調べることにする。

外力が働かない非粘性流体の定常流を考えるならば、Eulerの運動方程式の時間項は省略できて、

$$(\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad}p \quad (10)$$

となる。ここに、 \vec{v} は速度ベクトル、 ρ は流体の密度、 p は圧力である。図4に示したように、煙が翼に沿って滑らかに流れ、煙が時間変動することなく定常とみなせるならば1本の煙線は1本の流線とみなしてよいであろう。そこで、ある流線に沿って測った長さを s 、接線方向の単位速度ベクトル（接線ベクトル）を \vec{m} 、流速の大きさを $q = |\vec{v}|$ とするならば、

$$\vec{v} \cdot \text{grad} = q \frac{\partial}{\partial s}, \quad \vec{v} = q\vec{m} \quad (11)$$

である。(11)より、

$$(\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{v} = q \frac{\partial}{\partial s}(q\vec{m}) = q \frac{\partial q}{\partial s} \vec{m} + q^2 \frac{\partial \vec{m}}{\partial s} \quad (12)$$

ここで、微分幾何学のフレネ＝セレの公式、

$$\frac{\partial \vec{m}}{\partial s} = \frac{1}{R} \vec{n}, \quad \kappa = \frac{1}{R} \quad (13)$$

を用いる⁽⁴⁾。ここに、 \vec{n} は流線の法線ベクトル、 κ は曲率、 R は曲率半径である。したがって、(10)式は、

$$\text{grad}p = -\frac{\rho}{2} \frac{\partial q^2}{\partial s} \vec{m} - \rho q^2 \kappa \vec{n} \quad (14)$$

と書き下せる。圧力は \vec{m} と \vec{n} で作る平面内で変化するから、それぞれのベクトル方向のこう配は

$$\frac{\partial p}{\partial s} = -\frac{\rho}{2} \frac{\partial q^2}{\partial s}, \quad \frac{\partial p}{\partial n} = -\rho q^2 \kappa \quad (15)$$

で与えられる。流体の密度は圧力のみ関数と見なせば、(15)の第1式は

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} q^2 \right) = 0 \quad (16)$$

と書き換えられ、 s について積分するとよく知られた流体のエネルギー保存を示すベルヌーイ (Bernoulli) の定理が得られる。冒頭にも述べたとおり、この式は従来の揚力発生機構の説明にしばしば登場する。

一方、(15)の第2式は流線と直角方向、すなわち法線方向の圧力こう配と流体運動との関係を与えている。流線が正の揚力の方向、すなわち凸に湾曲している場合には、曲率中心、すなわち翼表面に向かって圧力が低下し、そのこう配は流速の2乗と曲率の積に比例することを示している。曲率が大きい、あるいは、曲率半径が小さい翼近傍には、大きな圧力のこう配が発生する。圧力こう配の向きから、翼近傍の圧力が最も低く、遠ざかるにつれて次第に大気圧に近づくことから、翼には下から上向きの力、すなわち揚力が働くことになるわけである。流線が凸に湾曲した領域では、「周りに比べて圧力が低くなることから、ベルヌーイの定理より流れは加速されている」ということもできる。この説明は従来の「流れが加速された結果、圧力が低下する」という論理の逆である。湾曲した流線に沿う流体に働く向心力とバランスした圧力のこう配で流れは加速され、翼周りに循環を生んでいるのである。また、正の循環（揚力）をもつ翼を回り込んだ流れは、結局翼を過ぎた後方で吹き下ろされている。流体を曲げた反力として揚力が発生している訳で、翼は流れの方向を効率良く偏向する装置と見なすことができよう。

4. まとめ

「なぜ翼に揚力が発生するか」について、より平易な説明を心がけたつもりであったが、思いのほか数式が多くなってしまった。重要な式(15)のみを提示するにはあまりにも不親切と思ったからである。本稿の前半にK-J定理から揚力の公式を導くために多くの紙面を割いたが、揚力発生の本原理の数理的根拠を提示するためである。この根拠の上に立って、後半では循環の発生と流線の曲がりの関係に着目し、流体に働く向心力と圧力のこう配から揚力の発生原理を説明した。著者が知る限りにおいてこの流線曲率の定理を用いた揚力の最初の説明を、今から40年ほど前に出版された『続物理の散歩道』⁽⁶⁾に見いだすことができる。著者は数名の匿名ロゲルギストであるが、おそらく該記事の執筆者は今井功先生であると思われる。本稿を執筆するに当たり参考にさせていただいた。ここに深甚なる感謝の意を表したい。

最後に、本稿は既刊のトピックス⁽⁶⁾を大幅に加筆したものである。

(原稿受付 2010年1月22日)

●文献

- (1) たとえば、<http://hitomix.com/taruta/paperplane/Bernoulli-1.html>
- (2) Abbott, I. H. and von Doenhoff, A. E., *Theory of wing sections*, (1959), Dover.
- (3) 日本機械学会編, 写真集 流れ, (1984), 70, 丸善.
- (4) たとえば, 矢野健太郎・石原 繁, ベクトル解析, (1968), 63, 裳華房.
- (5) ロゲルギスト, 続 物理の散歩道, (1971), 157-162, 岩波書店.
- (6) 高木正平, 流線の曲がりから揚力の発生機構を説明する試み, 日本航空宇宙学会誌, 58-672 (2010), 30-32. (印刷中)